



第十三届“叶圣陶杯”国际青少年趣味数理科普知识大赛

省级初赛试题（高中组）

总分：100 分

一. 选择题（每题 5 分，共 50 分）

1. “ $a < b$ ”是“ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”的（ ）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

2.已知集合 $A = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $B = \{x | a - 1 < x < a + 1\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围为（ ）

A. $1 < a < 2$

B. $1 \leq a < 2$

C. $1 < a \leq 2$

D. $1 \leq a \leq 2$

3.下列函数是奇函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的为（ ）

A. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

B. $f(x) = \sqrt{x}$

C. $f(x) = \log_2 |x|$

D. $f(x) = e^x - e^{-x}$

4.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 是偶函数, $f(x+2)$ 是奇函数, 且 $f(1) = 2$, 则 $f(f(3)) =$ （ ）

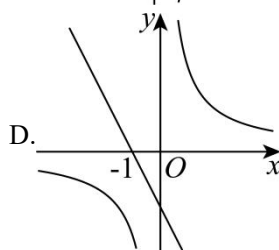
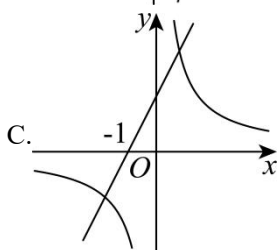
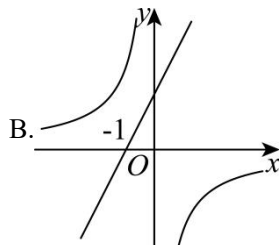
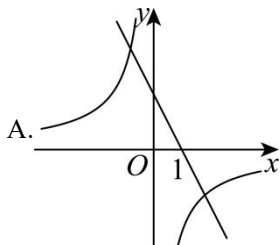
A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

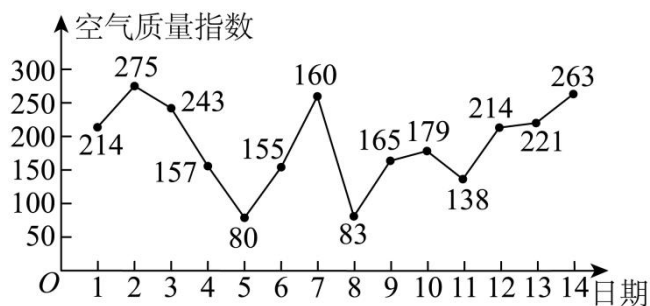
5.反比例函数 $y = \frac{k-5}{x}$ 与一次函数 $y = kx + k$ (其中 x 为自变量, k 为非零常数) 在同一直角坐标系中的大致图象可以是（ ）



6.空气质量指数是评估空气质量状况的一组数字, 空气质量指数划分为

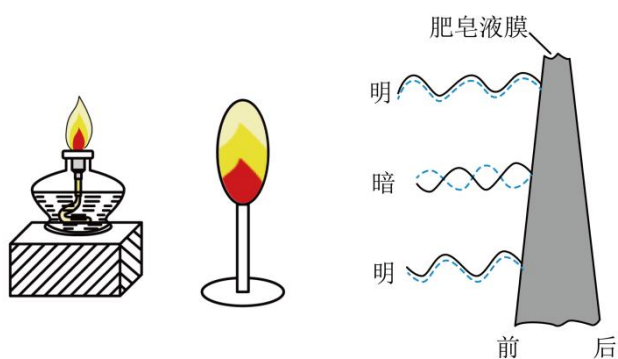


[0,50),[50,100),[100,150),[150,200),[200,250) 和[250,300] 六档, 分别对应“优”、“良”、“轻度污染”、“中度污染”、“重度污染”和“严重污染”, 六个等级。如图, 是我市冬季某月连续 14 天的空气质量指数趋势图, 则下列说法中正确的是 ()



- A. 从第三天到第七天空气质量越来越好
- B. 这 14 天中空气质量指数的中位数为 196.5
- C. 连续三天中空气质量指数方差最小的是 5 日到 7 日
- D. 这 14 天中有 5 天空气质量为“中度污染”

7. 在酒精灯的灯芯上撒一些食盐, 灯焰就能发出明亮的黄光。把铁丝圈在肥皂水中蘸一下, 让它挂上一层薄薄的液膜。把这层液膜当作一个平面镜, 用它观察灯焰, 下列说法正确的是 ()



- A. 换用不同颜色的光做实验时, 亮条纹的间距保持不变
- B. 肥皂膜上的条纹是光线在液膜后表面发生干涉现象所致
- C. 可利用薄膜干涉的原理检测精密仪器光学平面的平滑度
- D. 液膜厚度相同的位置, 前后表面反射光的路程差是不同的

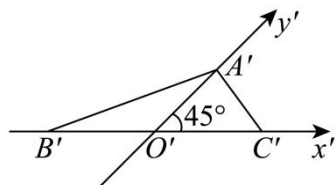
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: \frac{|x|}{\sqrt{3}} + |y| = 1$ 的周长为 ()

- A. 4
- B. 6
- C. 8
- D. 10



9. 用斜二测画法画水平放置的 $\triangle ABC$ ，其直观图 $\triangle A'B'C'$ 如图所示，其中 $B'O' = C'O' = 2$ 。

若原 $\triangle ABC$ 的周长为10，则 $A'O' =$ ()



A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{15}$

10. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩，老师说，你们四人中有2位优秀，2位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩，看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩，根据以上信息，则 ()

A. 乙可以知道其他两人的成绩

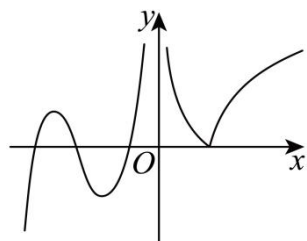
B. 乙、丁可以知道对方的成绩

C. 乙、丁可以知道自己的成绩

D. 丁可以知道四人的成绩

二. 填空题 (每题5分，共50分)

11. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，可以用二分法求近似值的零点个数是_____。



12. 球的半径为10，若它的截面面积是 64π ，则球心到截面的距离是_____。

13. 某小组的7名成员站成一排，其中甲、乙相邻，且丙、丁相邻，不同的排法共有_____种。

14. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ， $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$ ，则 $a_{20} =$ _____。

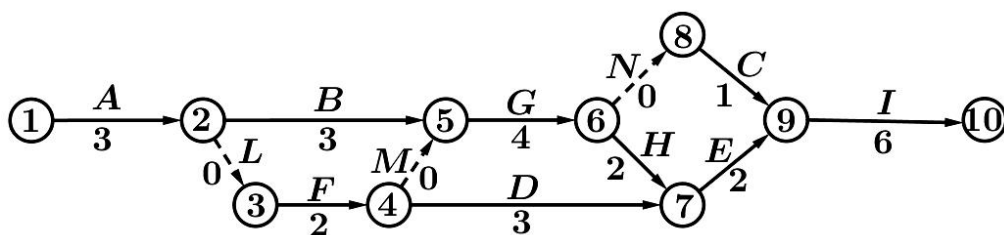
15. 若对常数 $m (m \neq 0)$ 和实数 $x \in \mathbf{R}$ ，等式 $f(x+m) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 恒成立，函数 $f(x)$ 的一个周期为_____。

16. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，焦距是短半轴长的 $2\sqrt{3}$ 倍，点 A, B, P 是椭圆



圆 E 上的三个不同点, 线段 AB 交 x 轴于点 $Q(Q$ 异于坐标原点 O), 且总有 $\triangle AQP$ 的面积与 $\triangle BQP$ 的面积相等, 直线 PA, PB 分别交 x 轴于点 M, N 两点, 则 $|OM| \cdot |ON|$ 的值为 _____。

17. 某项工程的工作流程图如图所示 (单位: 天), 则完成该工程的最短总工期是 _____ 天。



18. 每年年初存入银行 1 万元, 持续 10 年, 设年利率为 2%, 按年复利计息, 则 10 年后之本利和为 _____。($1.02^{10} \approx 1.2190$)

19. 某中学高一年级有男生 640 人, 女生 480 人。为了解该年级男、女学生的身高差异, 采用分层随机抽样。若样本容量为 70, 则应抽取的女生人数为 _____。

20. 已知函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin 2x}{x^2 + 1} + ax$ 在区间 $[-b, b]$ 上的值域为 $[m, n]$, 则 $m+n =$ _____。