



第十二届“叶圣陶杯”国际青少年趣味数理科普知识大赛

省级初赛试题（高中组）

总分：100 分

一. 选择题（每题 5 分，共 50 分）

1. 已知直线 $a, b \subset$ 平面 α , l 为直线, 则 “ $l \perp a, l \perp b$ ” 是 “ $l \perp \alpha$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 已知集合 $A = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $B = \{x | a-1 < x < a+1\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围为 ()

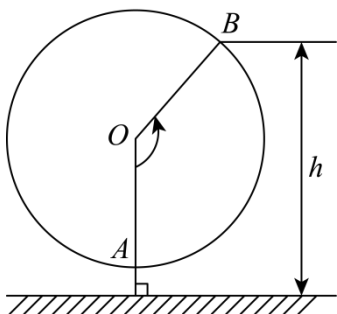
- A. $1 < a < 2$ B. $1 \leq a < 2$ C. $1 < a \leq 2$ D. $1 \leq a \leq 2$

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 若 $a = f(3^{-0.5})$,

$b = f\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $c = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

4. 如图为一个摩天轮示意图, 该摩天轮圆半径为 4.8m, 圆上最低点与地面距离为 0.8m, 60s 转动一周。图中 OA 与地面垂直, 从 OA 开始逆时针转动, 经过 ts 到达 OB 。设 B 点与地面的距离为 hm 。若 h 与 t 的函数解析式为 $h = 5.6 + 4.8 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, 其中 $\omega > 0$, 则 ω 的值为 ()



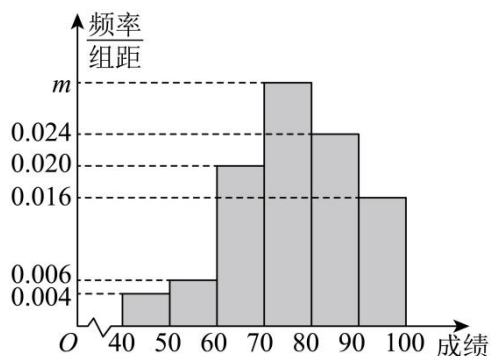
- A. $\frac{\pi}{60}$ B. $\frac{\pi}{30}$ C. $\frac{\pi}{15}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - k$ ($0 < k \leq \frac{1}{2}$) 的零点个数为 ()



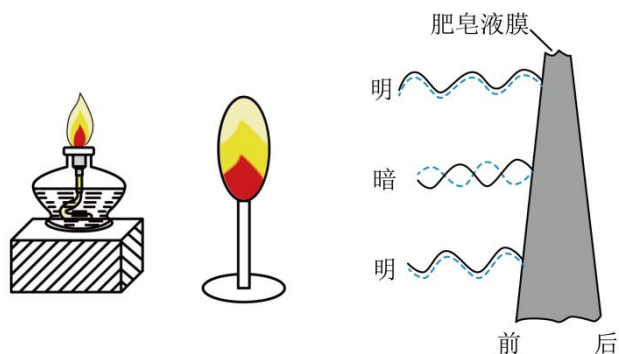
A.1 或 2 B.2 C.1 或 3 D.3

6.将一次学校数学模拟竞赛的成绩统计如下图所示，记本次模拟竞赛的成绩的中位数为 a ，则 $a =$ ()



A.75 B. $75\frac{2}{3}$ C. $76\frac{1}{3}$ D. $76\frac{2}{3}$

7.在酒精灯的灯芯上撒一些食盐，灯焰就能发出明亮的黄光。把铁丝圈在肥皂水中蘸一下，让它挂上一层薄薄的液膜。把这层液膜当作一个平面镜，用它观察灯焰，下列说法正确的是 ()



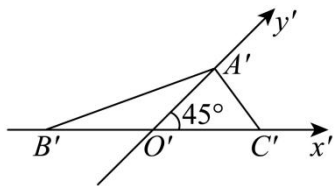
A.换用不同颜色的光做实验时，亮条纹的间距保持不变
B.肥皂膜上的条纹是光线在液膜后表面发生干涉现象所致
C.可利用薄膜干涉的原理检测精密仪器光学平面的平滑度
D.液膜厚度相同的位置，前后表面反射光的路程差是不同的

8.在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C: \frac{|x|}{\sqrt{3}} + |y| = 1$ 的周长为 ()

A.4 B.6 C.8 D.10

9.用斜二测画法画水平放置的 $\triangle ABC$ ，其直观图 $\triangle A'B'C'$ 如图所示，其中 $B'O' = C'O' = 2$ 。

若原 $\triangle ABC$ 的周长为 10，则 $A'O' =$ ()



A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{15}$

10.甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩，老师说，你们四人中有2位优秀，2位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩，看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩，根据以上信息，则（ ）

A.乙可以知道其他两人的成绩

B.乙、丁可以知道对方的成绩

C.乙、丁可以知道自己的成绩

D.丁可以知道四人的成绩

二. 填空题（每题 5 分，共 50 分）

11.八卦是中国文化的基本哲学概念，如图 1 是八卦模型图，其平面图形记为图 2 的正八边形 $ABCDEFGH$ ，其中 $OA=2$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF}) =$ _____。



图1

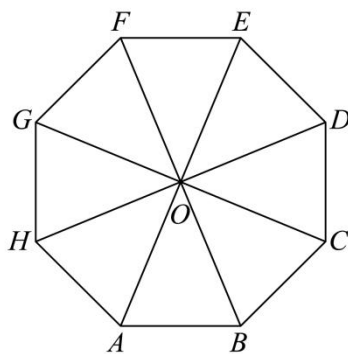


图2

12.某小组的 7 名成员站成一排，其中甲、乙相邻，且丙、丁相邻，不同的排法共有_____种。

13.已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=2$ ， $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$ ，则 $a_{20} =$ _____。

14.若对常数 $m(m \neq 0)$ 和实数 $x \in \mathbf{R}$ ，等式 $f(x+m) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 恒成立，函数 $f(x)$ 的一个周期为_____。

15.已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，焦距是短半轴长的 $2\sqrt{3}$ 倍，点 A, B, P 是椭



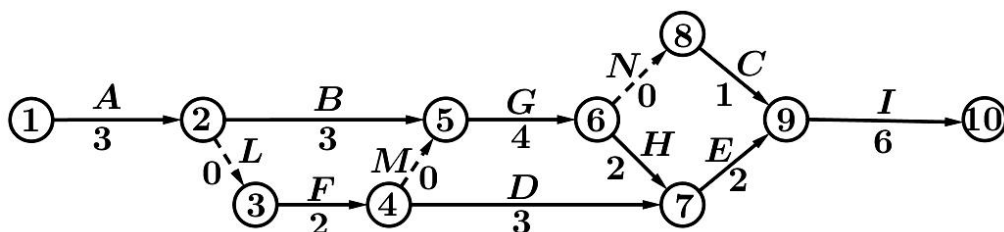
圆 E 上的三个不同点, 线段 AB 交 x 轴于点 Q (Q 异于坐标原点 O), 且总有 $\triangle AQP$ 的面积与 $\triangle BQP$ 的面积相等, 直线 PA, PB 分别交 x 轴于点 M, N 两点, 则 $|OM| \cdot |ON|$ 的值为

_____。

16. 已知动点 Q 在 $\triangle ABC$ 所在平面内运动, 若对于空间中任意一点 P , 都有

$\overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + m\overrightarrow{CP}$, 则实数 m 的值为_____。

17. 某项工程的工作流程图如图所示 (单位: 天), 则完成该工程的最短总工期是_____天。



18. 过点 P 作圆 $M: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 的两条切线, 切点为 A, B , 若 $\cos \angle APB = \frac{4}{5}$, 则四边形 $PAMB$ (M 为圆 M 的圆心) 的面积是_____。

19. 某中学高一年级有男生 640 人, 女生 480 人。为了解该年级男、女学生的身高差异, 采用分层随机抽样。若样本容量为 70, 则应抽取的女生人数为_____。

20. 已知函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin 2x}{x^2 + 1} + ax$ 在区间 $[-b, b]$ 上的值域为 $[m, n]$, 则 $m+n =$ _____。