



第十一届“叶圣陶杯”国际青少年趣味数理科普知识大赛

省级初赛试题（高中组）

总分：100 分

一. 选择题（每题 5 分，共 50 分）

1. 甲、乙、丙、丁四位同学猜测校运会长跑比赛中最终获得冠军的运动员

甲说：“冠军是李亮或张正”

乙说：“冠军是林帅或张正”

丙说：“林帅和李亮都不是冠军”

丁说：“陈奇是冠军”。

结果出来后，只有两个人的推断是正确的，则冠军是（ ）

A. 张正 B. 李亮 C. 林帅 D. 陈奇

2. 已知集合 $S = (-1, 1)$ ，集合 $T = \{y | y = \sin x\}$ ，则 $S \cup T =$ （ ）

A. $\emptyset$ B. S C. T D. R

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，若 $a = f(3^{-0.5})$ ，

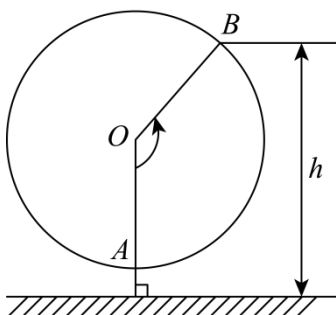
$b = f\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ， $c = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则（ ）

A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

4. 如图为一个摩天轮示意图，该摩天轮圆半径为 4.8m，圆上最低点与地面距离为 0.8m，

60s 转动一周。图中 OA 与地面垂直，从 OA 开始逆时针转动，经过 ts 到达 OB 。设 B 点与

地面的距离为 hm 。若 h 与 t 的函数解析式为 $h = 5.6 + 4.8 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ ，其中 $\omega > 0$ ，则 ω 的值为（ ）





A. $\frac{\pi}{60}$

B. $\frac{\pi}{30}$

C. $\frac{\pi}{15}$

D. $\frac{\pi}{2}$

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - k (0 < k \leq \frac{1}{2})$ 的零点个数为 ()

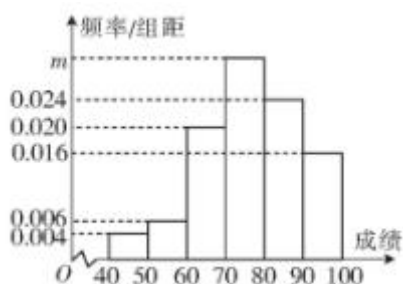
A. 1 或 2

B. 2

C. 1 或 3

D. 3

6. 将一次学校数学模拟竞赛的成绩统计如下图所示, 记本次模拟竞赛的成绩的中位数为 a , 则 $a =$ ()



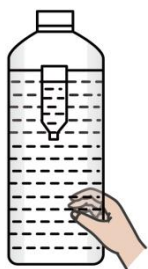
A. 75

B. $75\frac{2}{3}$

C. $76\frac{1}{3}$

D. $76\frac{2}{3}$

7. 如图是小魔术“浮沉子”的模型。在密封的矿泉水瓶中, 一开口向下的小瓶置于矿泉水瓶中, 小瓶中封闭一段空气, 可看作理想气体。现用手缓慢挤压矿泉水瓶, 小瓶慢慢下沉, 瓶内气体的温度保持不变, 则下沉过程中, 小瓶内的气体 ()



A. 放出热量

B. 体积不变, 内能不变

C. 体积减小, 内能增大

D. 单位时间内与单位面积的瓶壁碰撞的气体分子数减小

8. 已知 $A(2, -1)$, $B(6, 1)$, 则在 y 轴上的截距是 -3 , 且经过线段 AB 的中点的直线方程为 ()

A. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

B. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

D. $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$



9. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 且垂直于 x 轴的弦为 AB , O 为抛物线的顶点, 则 $\angle AOB$ 的度数 ()

- A.小于 90°
B.等于 90°
C.大于 90°
D.不能确定

10. 设 $a > 0$, $b > 0$, 若 $a + 2b = 5$, 则 $\frac{(a+1)(2b+1)}{\sqrt{ab}}$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}$

二. 填空题 (每题 5 分, 共 50 分)

11. 八卦是中国文化的基本哲学概念，如图 1 是八卦模型图，其平面图形记为图 2 的正八边形 $ABCDEFGH$ ，其中 $OA=2$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF}) =$ _____。



图 1

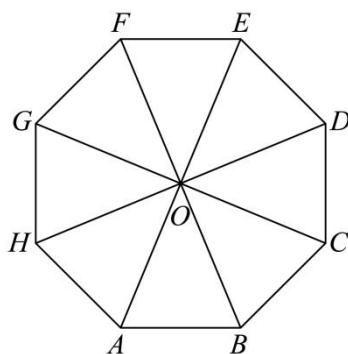
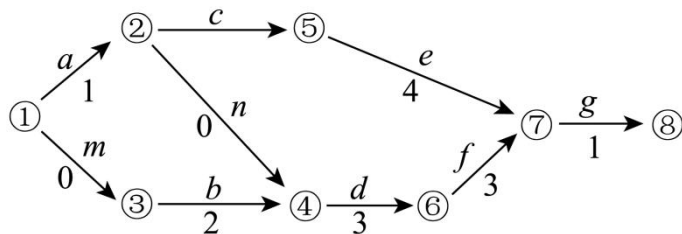


图2

12.某工程的工序流程图如图（工时单位：天），现已知工程总时数为 10 天，则工序 c 所需工时数为 _____ 天。



13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 3n$, 则 $a_3 + a_4 =$ 。

14. 已知函数 $f(x) = \sin x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$, 给出以下四个命题:

① $f(x)$ 的最小正周期为 π ;



② $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

③ $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{11\pi}{8}, 0\right)$ 中心对称;

④ $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 对称.

其中正确命题的个数是_____个。

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x$, 过椭圆上一点 P 作 l_1 、 l_2 的平行线, 分别交 l_1 、 l_2 于 M 、 N 两点。若 $|MN|$ 为定值, 则 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值是_____。

16. 已知动点 Q 在 $\triangle ABC$ 所在平面内运动, 若对于空间中任意一点 P , 都有 $\overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + m\overrightarrow{CP}$, 则实数 m 的值为_____。

17. 已知某种铅蓄电池由于硫酸浓度的降低, 每隔一个月其性能指数都要损失 10%, 且一般认为当该种类型的电池的性能指数降低到原来的 $\frac{1}{4}$ 以下时就需要更换其中的硫酸来达到持久续航, 则最多使用_____个月就需要更换纯硫酸。(参考数据 $\lg 3 \approx 0.477$, $\lg 2 \approx 0.301$)

18. 过点 P 作圆 $M: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 的两条切线, 切点为 A 、 B , 若 $\cos \angle APB = \frac{4}{5}$, 则四边形 $PAMB$ (M 为圆 M 的圆心) 的面积是_____。

19. 全班数学月考第一次成绩的平均分数是 60 分, 标准差为 12 分, 第二次成绩平均分数是 69 分, 标准差为 10 分, 两次成绩的相关系数是 0.6, 小明第一次成绩是 70 分, 请问小明第二次成绩预测是_____分。

20. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 5$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[4m, 4n]$, 则 $m + n$ 的值为_____。