



第十届“叶圣陶杯”国际青少年趣味数理科普知识大赛

省级初赛试题（高中组）

总分：100 分

一. 选择题（每题 5 分，共 50 分）

1. 某次考试后，甲、乙、丙、丁四位同学讨论其中一道考题，各自陈述如下，甲说：我做错了；乙说：甲做对了；丙说：我做错了；丁说：我和乙中有人做对. 已知四人中只有一位同学的解答是正确的，且只有一位同学的陈述是正确的，则解正确的同学是（ ）

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

2. 已知集合 $A = \{0, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则集合 $A \cup B =$ ()

A. $\{0\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{2\}$

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，则不等式 $f(x+1) > f(2x)$ 的解集为 ()

A. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ B. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

4. 我国古代数学家僧一行应用“九服晷影算法”在《大衍历》中建立了晷影长 l 与太阳天顶距 $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 的对应数表，这是世界数学史上较早的一张正切函数表. 根据三角学知识可知，晷影长度 l 等于表高 h 与太阳天顶距 θ 正切值的乘积，即 $l = h \tan \theta$. 对同一“表高”两次测量，第一次和第二次太阳天顶距分别为 α , β , 若第一次晷影长是“表高”的 3 倍，且 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 则第二次的晷影长是“表高”的 () 倍

A. 3 B. 2 C. $\frac{4}{3}$ D. 1

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - k (0 < k \leq \frac{1}{2})$ 的零点个数为 ()

A. 1 或 2 B. 2 C. 1 或 3 D. 3

6. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 交于 A 、 B 两点，且 AB 平分圆 C_1 的周长，则 $a+b$ 的值为 ()



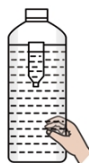
A.0

B.2

C.4

D.6

7.如图是小魔术“浮沉子”的模型。在密封的矿泉水瓶中，一开口向下的小瓶置于矿泉水瓶中，小瓶中封闭一段空气，可看作理想气体。现用手缓慢挤压矿泉水瓶，小瓶慢慢下沉，瓶内气体的温度保持不变，则下沉过程中，小瓶内的气体（ ）



A.放出热量

B.体积不变，内能不变

C.体积减小，内能增大

D.单位时间内与单位面积的瓶壁碰撞的气体分子数减小

8.已知 $A(2,-1)$ ， $B(6,1)$ ，则在 y 轴上的截距是 -3 ，且经过线段 AB 的中点的直线方程为（ ）

A. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

B. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

D. $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$

9.过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，且垂直于 x 轴的弦为 AB ， O 为抛物线的顶点，则 $\angle AOB$ 的度数（ ）

A.小于 90°

B.等于 90°

C.大于 90°

D.不能确定

10.设 $a > 0$ ， $b > 0$ ，若 $a + 2b = 5$ ，则 $\frac{(a+1)(2b+1)}{\sqrt{ab}}$ 的最小值为（ ）

A. $\sqrt{3}$

B.2

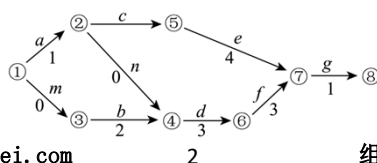
C. $2\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{3}$

二. 填空题（每题 5 分，共 50 分）

11. 设函数 $f(x) = x^2$ ，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$ _____。

12. 某工程的工序流程图如图（工时单位：天），现已知工程总时数为 10 天，则工序 c 所需工时数为_____天。





13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 3n$, 则 $a_3 + a_4 =$ _____。

14. 已知函数 $f(x) = \sin x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$, 给出以下四个命题:

① $f(x)$ 的最小正周期为 π ;

② $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

③ $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{11\pi}{8}, 0\right)$ 中心对称;

④ $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 对称.

其中正确命题的个数是_____个。

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x$, 过椭圆上一点 P 作 l_1 、 l_2 的平行线, 分别交 l_1 、 l_2 于 M 、 N 两点。若 $|MN|$ 为定值, 则 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值是_____。

16. 已知向量 $\vec{a} = (\lambda, 9)$, $\vec{b} = (1, \lambda)$ 共线且方向相同, 则 λ 的值等于_____。

17. 已知某种铅蓄电池由于硫酸浓度的降低, 每隔一个月其性能指数都要损失 10%, 且一般认为当该种类型的电池的性能指数降低到原来的 $\frac{1}{4}$ 以下时就需要更换其中的硫酸来达到持久续航, 则最多使用_____个月就需要更换纯硫酸 (参考数据 $\lg 3 \approx 0.477$, $\lg 2 \approx 0.301$)

18. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{12}{3\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta}$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴非负半

轴建立平面直角坐标系, 则曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{3}y \end{cases}$ 后, 得到的曲线是_____。

19. 全班数学月考第一次成绩的平均分数是 60 分, 标准差为 12 分, 第二次成绩平均分数是 69 分, 标准差为 10 分, 两次成绩的相关系数是 0.6, 小明第一次成绩是 70 分, 请问小明第二次成绩预测是_____分。

20. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 5$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[4m, 4n]$, 则 $m+n$ 的值为_____。